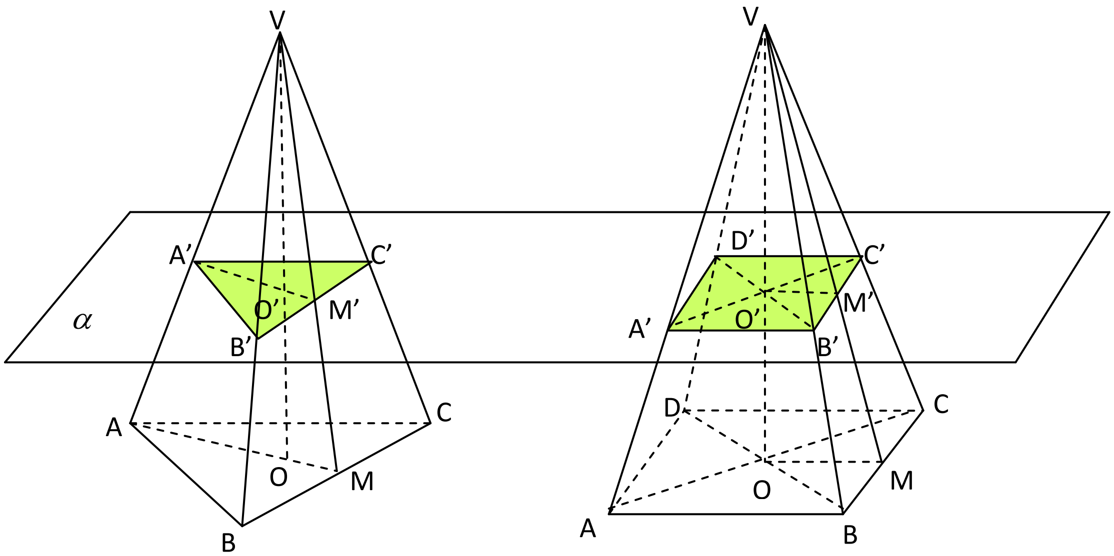
SECȚIUNI PARALELE CU BAZA ÎN PIRAMIDĂ
TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ



Piramidă triunghiulară regulată Piramidă patrulateră regulată

Se consideră un plan $\alpha \parallel (ABC)$. Atunci $VA \cap \alpha = \{A'\}$, $VB \cap \alpha = \{B'\}$, $VC \cap \alpha = \{C'\}$, $VD \cap \alpha = \{D'\}$, iar **secțiunile** rezultate sunt, în piramida triunghiulară regulată, triunghiul echilateral $\Delta A'B'C'$, respectiv, în piramida patrulateră regulată, pătratul $A'B'C'D'$.

De asemenea, $VO \perp (ABC)$, $VO \cap \alpha = \{O'\}$ și $VM \perp BC, M \in (BC)$, $VM \cap \alpha = \{M'\}$. Atunci, au loc următoarele relații:

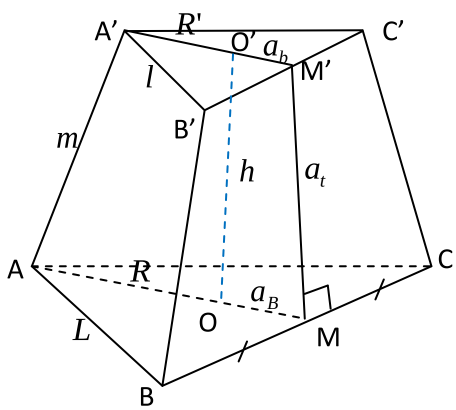
$$\alpha \parallel (ABC) \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VM'}{VM} = \frac{AM'}{AM} = \frac{AO'}{AO} = \frac{O'M'}{OM} = k. \quad (1)$$

Piramidele mici formate deasupra planului de secțiune, având ca baze secțiunile rezultate, se numesc **piramide asemenea** cu cele inițiale. Astfel, pentru raportul de asemănare k, din relația (1), au loc relațiile:

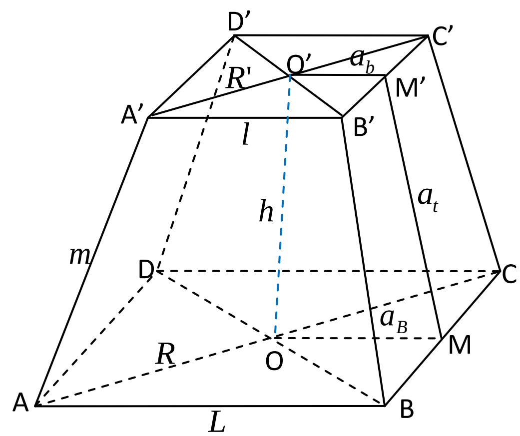
Piramida triunghiulară regulată	Piramida ptrulateră regulată
➢ $\frac{P_{\Delta A'B'C'}}{P_{\Delta ABC}} = k$, $\frac{A_{\Delta A'B'C'}}{A_{\Delta ABC}} = k^2$ ➢ $\frac{A_{\ell\, VA'B'C'}}{A_{\ell\, VABC}} = \frac{A_{t\, VA'B'C'}}{A_{t\, VABC}} = k^2$	➢ $\frac{P_{A'B'C'D'}}{P_{ABCD}} = k$, $\frac{A_{A'B'C'D'}}{A_{ABCD}} = k^2$ ➢ $\frac{A_{\ell\, VA'B'C'D'}}{A_{\ell\, VABCD}} = \frac{A_{t\, VA'B'C'D'}}{A_{t\, VABCD}} = k^2$

➢ $\frac{V_{VA'B'C'}}{V_{VABC}} = k^3$	➢ $\frac{V_{VA'B'C'D'}}{V_{VABCD}} = k^3$

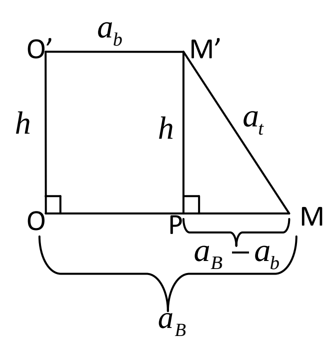
Corpul care se obține prin înlăturarea piramidei mici determinate de planul de secțiune se numește **trunchi de piramidă.**



Trunchi de piramidă triunghiulară regulată



Trunchi de piramidă patrulateră regulată

<table>
<tr><th>Notații / Formule arii și volum</th><th>Semnificații</th><th>Legături utile între elemente</th></tr>
<tr><td>AB = L</td><td>Latura bazei mari</td><td rowspan="9">

$\boxed{a_t^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2}$
Analog, din trapezul dreptunghic $A'AOO'$ se deduce relația:
$\boxed{m^2 = h^2 + (R - R')^2}$</td></tr>
<tr><td>A'B' = l</td><td>Latura bazei mici</td></tr>
<tr><td>OO' = h</td><td>Înălțimea trunchiului</td></tr>
<tr><td>AA' = m</td><td>Muchia laterală</td></tr>
<tr><td>O'M' = a_b</td><td>Apotema bazei mici</td></tr>
<tr><td>OM = a_B</td><td>Apotema bazei mari</td></tr>
<tr><td>MM' = a_t</td><td>Apotema trunchiului</td></tr>
<tr><td>AO = R</td><td>Raza cercului circumscris bazei mari</td></tr>
<tr><td>A'O' = R'</td><td>Raza cercului circumscris bazei mici</td></tr>
</table>

$A_\ell = \dfrac{(P_b + P_B)\cdot a_t}{2}$	A_ℓ = aria laterală P_b / P_B = perimetrul bazei mici / mari	Iar din trapezul dreptunghic $M'MCC'$ se găsește relația: $\boxed{m^2 = a_t^{\,2} + \left(\dfrac{L}{2} - \dfrac{l}{2}\right)^2}$
$A_t = A_\ell + A_b + A_B$	A_t = aria totală A_b / A_B = aria bazei mici / mari	
$V = \dfrac{h}{3}\left(A_b + A_B + \sqrt{A_b \cdot A_B}\right)$	V = volumul trunchiului de piramidă	

Observație. În calculul cu proporții, ne sunt utile și proporțiile derivate. Reamintim, în acest sens:

		$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$		$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$
$\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d}$	$\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d}$	$\dfrac{a}{b+a} = \dfrac{c}{d+c}$	$\dfrac{a}{b-a} = \dfrac{c}{d-c}$	$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a\pm c}{b\pm d}$

Probleme rezolvate.

1. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are lungimile razelor cercurilor circumscrise celor două baze egale cu $\sqrt{3}$ cm, respectiv $3\sqrt{3}$ cm și apotema egală cu $\dfrac{\sqrt{31}}{3}$ cm.
   a) Calculați aria laterală și volumul trunchiului.
   b) Calculați volumul piramidei din care provine trunchiul.

Rezolvare.

a) Evident, bazele sunt triunghiuri echilaterale asemenea.

Avem $R = 3\sqrt{3} \Rightarrow L = R\sqrt{3} = 9$ cm, $P_B = 3L = 27$ cm, $a_B = \dfrac{R}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm și $A_B = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{81\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

Analog, $R' = \sqrt{3} \Rightarrow l = R'\sqrt{3} = 3$ cm, $P_b = 3l = 9$ cm, $a_b = \dfrac{R'}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm și $A_b = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2

Atunci, $A_\ell = \dfrac{(P_b + P_B)\cdot a_t}{2} = \dfrac{(9+27)\cdot \dfrac{\sqrt{31}}{3}}{2} = 6\sqrt{31}\ \text{cm}^2.$

Pentru calculul volumului, trebuie mai întâi să determinăm lungimea înălțimii trunchiului. Astfel, $a_t^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2 \Leftrightarrow \dfrac{31}{9} = h^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{31}{9} = h^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow h = \dfrac{2}{3}$ cm.

Atunci, $V = \dfrac{h}{3}\left(A_b + A_B + \sqrt{A_b \cdot A_B}\right) = \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{9\sqrt{3}}{4} + \dfrac{81\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\dfrac{9\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{81\sqrt{3}}{4}}\right) \Rightarrow$

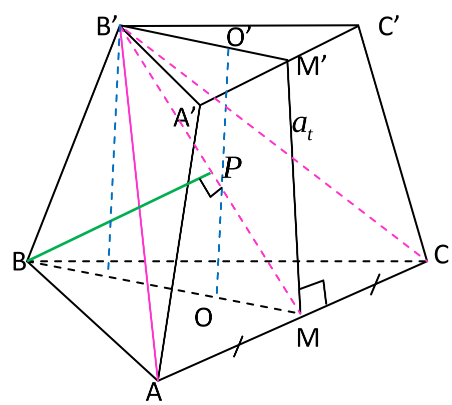
$$V = \frac{2}{9}\cdot\frac{117\sqrt{3}}{4} = \frac{13\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^3.$$

b) Folosim relația $\dfrac{V_{VA'B'C'}}{V_{VABC}} = k^3$. Se observă că

$$V_{VABC} = V_{VA'B'C'} + V_{trunchi} \Rightarrow V_{VA'B'C'} = V_{VABC} - V_{trunchi} \text{ și } k = \frac{l}{L} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

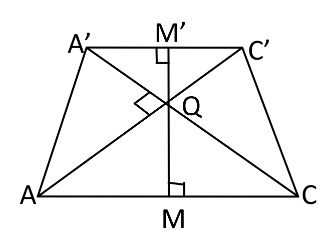
Atunci, $\dfrac{V_{VABC} - V_{trunchi}}{V_{VABC}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{V_{trunchi}}{V_{VABC}} = \dfrac{1}{27} \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{13\sqrt{3}}{2}}{V_{VABC}} = \dfrac{26}{27} \Rightarrow V_{VABC} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^3.$ ■

2. În trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, bazele sunt ΔABC și $\Delta A'B'C'$, $AB = 24$ cm, $A'B' = 12$ cm, iar diagonalele unei fețe laterale sunt perpendiculare.
   a) Arătați că apotema trunchiului are lungimea de 18 cm.
   b) Calculați volumul trunchiului de piramidă.
   c) Calculați distanța de la punctul B la planul $(AB'C)$.



Rezolvare.

a) Apotema trunchiului este înălțimea MM' în trapezul isoscel ortodiagonal $ACC'A'$ (figura alăturată). Dacă $AC' \cap A'C = \{Q\}$, știind că $AC' \perp A'C$, iar MQ și $M'Q$ sunt medianele corespunzătoare ipotenuzelor în triunghiurile dreptunghice



ΔAQC, respectiv $\Delta A'QC'$, rezultă că $MQ = \frac{AC}{2} = \frac{24\ cm}{2} = 12$ cm și $M'Q = \frac{A'C'}{2} = \frac{12\ cm}{2} = 6$ cm. Atunci, $a_t = MM' = MQ + M'Q = 18$ cm.

b) Calculăm mai întâi înălțimea trunchiului, OO'. Avem:

$a_B = \frac{L\sqrt{3}}{6} = \frac{24\sqrt{3}}{6} = 4\sqrt{3}$ cm, $a_b = \frac{l\sqrt{3}}{6} = \frac{12\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$ cm, $A_B = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{576\sqrt{3}}{4} = 144\sqrt{3}\text{ cm}^2$ și $A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$ cm^2.

Atunci, $a_t^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2 \Leftrightarrow 18^2 = h^2 + \left(4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow 324 = h^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{78}$ cm,

iar $V = \frac{h}{3}\left(A_b + A_B + \sqrt{A_b \cdot A_B}\right) = \frac{2\sqrt{78}}{3}\left(144\sqrt{3} + 36\sqrt{3} + \sqrt{144\sqrt{3} \cdot 36\sqrt{3}}\right) \Rightarrow$

$$V = \frac{2\sqrt{78}}{3} \cdot 252\sqrt{3} = 504\sqrt{26}\ \text{cm}^3.$$

c) Știm că : $\left.\begin{array}{l} BM \perp AC \\ M'M \perp AC \\ BM \cap M'M = \{M\} \\ BM.\ M'M \subset (B'BM) \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (B'BM)$, dar $BP \subset (B'BM) \Rightarrow AC \perp BP$.

Astfel, $\left.\begin{array}{l} BP \perp B'M \\ BP \perp AC \\ B'M \cap AC = \{M\} \\ B'M.\ AC \subset (B'AC) \end{array}\right\} \Rightarrow BP \perp (B'AC) \Leftrightarrow d(B, (B'AC)) = BP$.

Vom scrie aria triunghiului $\Delta B'BM$ în două moduri: $A_{\Delta B'BM} = \frac{B'M \cdot BP}{2} = \frac{BM \cdot d(B', BM)}{2}$.

Din ΔABC= echilateral, găsim $BM = \frac{L\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ cm.

Din $\Delta A'QC'$= dreptunchic isoscel $\overset{T.P.}{\Rightarrow} A'C' = A'Q\sqrt{2} \Rightarrow A'Q = 6\sqrt{2}$ cm.

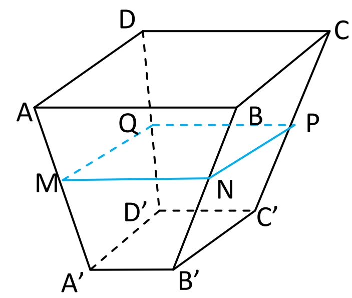
Analog, din ΔAQC = dreptunchic isoscel $\overset{T.P.}{\Rightarrow} AC = CQ\sqrt{2} \Rightarrow CQ = 12\sqrt{2}$ cm. Atunci $A'C = A'Q + CQ = 18\sqrt{2}$ cm, deci $B'A = 18\sqrt{2}$ cm.

Din $\Delta B'AM$ = dreptunghic în *M*, cu teorema lui Pitagora, găsim $B'M = 6\sqrt{14}$ cm.

Cum $BM \parallel B'M' \Rightarrow d(B', BM) = d(O', BM) = OO' = 2\sqrt{78}$ cm. Atunci,

$A_{\Delta B'BM} = \frac{B'M \cdot BP}{2} = \frac{BM \cdot d(B', BM)}{2} \Leftrightarrow 6\sqrt{14} \cdot BP = 12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{78} \Rightarrow BP = \frac{12\sqrt{91}}{7}$ cm. ■

3. În figura alăturată este reprezentată o fântână săpată în pământ, având forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB=3\,\text{m}$, $A'B'=1\,\text{m}$ și adâncimea de 4 m. Fântâna conține apă până la jumătate din adâncimea sa.
   a) Câți litri de apă există în fântână?
   b) Dacă punem toată apa din fântână într-un rezervor în formă de cub cu latura de 2 m, la ce înălțime se ridică apa în rezervor?



Rezolvare.

a) Corpul format de apa din fântână este un trunchi de piramidă patrulateră regulată cu bazele $A'B'C'D'$ și $MNPQ$, iar înălțimea are lungimea egală cu jumătate din cea a fântânii. Astfel, în trapezul $A'B'BA$, MN este linie mijlocie, deci $MN=\dfrac{AB+A'B'}{2}=2$ m, iar $h_{apă}=2\,\text{m}$. Așadar, volumul apei din fântână va fi: $V_{apă}=\dfrac{h_{apă}}{3}\left(A_{A'B'C'D'}+A_{MNPQ}+\sqrt{A_{A'B'C'D'}\cdot A_{MNPQ}}\right)=\dfrac{2m}{3}\left(4m^2+1m^2+2m^2\right)=\dfrac{14}{3}\,\text{m}^3$, de unde $V_{apă}=\dfrac{14000}{3}=4666,(6)$ litri.

b) Dacă se toarnă apa în rezervorul în formă de cub, apa ia forma vasului și determină un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 2m, 2m și $h_{apă\ cub}$. Atunci avem:

$$V_{apă}=2m\cdot 2m\cdot h_{apă\ cub}\Leftrightarrow h_{apă\ cub}=\frac{\frac{14}{3}m^3}{4m^2}=\frac{7}{6}m=1,1(6)\ \text{m}.\ \blacksquare$$

Probleme propuse.

1. Trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are baza mare $ABCD$, valoarea tangentei unghiului $\angle A'AC$ este egală cu $\dfrac{3}{2}$, $AB=12$ cm și $A'C'=8\sqrt{2}$ cm.
   a) Arătați că înălțimea trunchiului de piramidă are lungimea de $3\sqrt{2}$ cm.
   b) Calculați aria laterală a trunchiului de piramidă.
   c) Fie P un punct situat pe muchia (BB'). Calculați lungimea segmentului BP astfel încât aria triunghiului ΔAPC să fie minimă.

2. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu baza $ABCD$. Latura bazei este egală cu $12\sqrt{3}$ cm și apotema piramidei este egală cu 12 cm. Se secționează piramida cu un plan paralel cu planul bazei astfel încât aria laterală a trunchiului de piramidă obținut să fie 75% din aria laterală a piramidei inițiale.
   a) Calculați distanța dintre planul bazei piramidei și planul de secțiune.
   b) Calculați volumul trunchiului de piramidă.
   c) Calculați distanța de la punctul A la planul (VBC).

3. Bazele unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt $ABCD$ și $A'B'C'D'$. Latura bazei mari este $AB=16$ cm, latura bazei mici este $A'B'=4$ cm și apotema trunchiului este de 9 cm.
   a) Arătați că înălțimea trunchiului are lungimea egală cu $3\sqrt{5}$ cm.
   b) Calculați volumul piramidei din care provine trunchiul.
   c) Calculați valoarea sinusului unghiului determinat de planele (ABB') și (DCC').

4. Piramida patrulateră regulată $VABCD$, de vârf V și de bază $ABCD$, are muchia bazei de 10 cm și înălțimea de 12 cm.
   a) Calculați aria totală a piramidei.
   b) La ce distanță de vârful piramidei trebuie dus un plan parallel cu planul bazei, astfel încât raportul dintre volumul piramidei mici și volumul trunchiului de piramidă obținut să fie egal cu $\frac{1}{7}$?
   c) Calculați valoarea tangentei unghiului determinat de planele (VAC) și (VAB).

Notă: Problemele au fost selectate din "*100 variante propuse pentru Testarea Națională*" și din culegerea *Matematică : algebră, geometrie, clasa a VIII-a, standard*, Editura Paralela 45, Pitești, 2014