FUNCȚII INVERSABILE

Ce înseamnă inversa unei funcţii?

Dacă luăm variabila x şi îi aplicăm funcţia f, obţinem f(x). Cum procedăm pentru a ne întoarce înapoi la x? În Word, dacă ultima operaţie efectuată este greşită, aceasta poate fi anulată, astfel încât documentul să arate ca înainte, cu ajutorul butonului Undo.

La noi, pentru a reveni la x sau „a anula” aplicarea funcției f, vom considera inversa funcţiei f, pe care o vom nota f^{-1}. Deci aplicând o funcție f și apoi inversa ei f^{-1} obținem valoarea inițială: $f^{-1}(\ f(x)\ ) = x$

$$\boxed{x} \xrightarrow{\ f\ } \boxed{f(x)} \xrightarrow{\qquad} \boxed{x}$$

O funcție inversă merge în sens opus!

Să începem cu un exemplu: Considerăm funcția **f(x) = 3x+4**, scrisă ca în diagrama următoare:

$$\boxed{x} \xrightarrow{\text{Înmulţeşte cu 3}} \boxed{3x} \xrightarrow{\text{Adună 4}} \boxed{3x+4}$$

Funcția inversă merge în sens opus, pornind de la y:

$$\boxed{\frac{y-4}{3}} \xleftarrow{\text{Împarte prin 3}} \boxed{y - 4} \xleftarrow{\text{Scade 4}} \boxed{y}$$

Deci, inversa funcției $f(x) = 3x+4$ este $f^{-1}(y) = (y-4)/3$

Înapoi de unde am pornit Lucrul cel mai interesant este că inversa ne aduce înapoi de unde am plecat (aşa cum, de la şcoală, ne întoarcem zilnic înapoi acasă)

Exemplu:

Folosind funcția anterioară, putem începe cu $x=5$: $f(5) = 3 \cdot 5+4 = 19$

Calculăm valoarea inversei în 19: $f^{-1}(19) = (19-4)/3 = 5$ şi îl obținem înapoi pe 5!

Putem scrie într-un singur rând: $f^{-1}(\ f(5)\ ) = 5$

Rămâne valabil și dacă schimbăm ordinea funcțiilor: $f(\ f^{-1}(x)\ ) = x$

Exemplu:

Începem cu: $f^{-1}(19) = (19-4)/3 = 5$ Apoi: $f(5) = 3 \cdot 5+4 = 19$

Deci putem spune: $f(\ f^{-1}(19)\ ) = 19$

Fahrenheit și Celsius

Un exemplu util este conversia temperaturii din grade Fahrenheit în grade Celsius și invers.

Pentru a transforma din Fahrenheit în Celsius: $\mathbf{f(F) = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)}$

Funcția **inversă** (din Celsius în Fahrenheit) este: $\mathbf{f^{-1}(C) = (C \cdot \frac{9}{5}) + 32}$

Orice funcţie are inversă?

Să considerăm funcţia $f(x)= x^2$. Atât 2, cât şi -2 merg prin funcţia f în 4. Dar dacă vreau să mă întorc din 4, pe care dintre cele două valori o aleg? Aşadar, pentru a admite inversă, trebuie să avem un singur x în domeniu pentru fiecare y din codomeniu, adică funcţia trebuie să fie bijectivă.

Proiect de tehnologie didactică

Disciplina: Matematică
Profesor: Bacula Mariana
Clasa: a X-a
Profil: tehnologic- 3h/săpt.(TC+CD)
Titlul lecţiei: Funcţii inversabile
Tipul lecţiei: Lecţie de comunicare/ însuşire de noi cunoştinţe
Scopul lecţiei: Se studiază inversa unei funcţii bijective
Timp de realizare: 50 min

Competenţe specifice:
C1. trasarea prin puncte a graficelor unor funcţii
C2. prelucrarea informaţiilor ilustrate de grafic, în scopul deducerii unor proprietăţi algebrice ale acestora (bijectivitate, inversabilitate)
C3. utilizarea de proprietăţi ale funcţiilor în trasarea graficelor şi rezolvare de ecuaţii
C4. interpretarea pe baza lecturilor grafice a proprietăţilor funcţiilor
C5. utilizarea echivalenţei dintre bijectivitate şi inversabilitate în trasarea unor grafice şi în rezolvarea unor ecuaţii algebrice

Obiective operaţionale: La sfârșitul orei elevii vor fi capabili:
O1. să determine inversa unei funcţii bijective (domeniul, codomeniul şi legea care leagă cele două mulţimi)
O2. să recunoască funcţiile inversabile
O3. să construiască diagrama cu săgeţi a lui f^{-1}
O4. să traseze graficul inversei, dându-se graficul unei funcţii bijective
O5. să determine inversa unei funcţii multiforme bijective

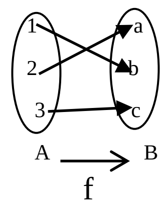
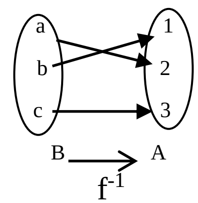
Strategiile didactice
1. Mijloace didactice - materiale didactice: videoproiector, fişe de lucru, flip-chart, postere, manual, culegere;
2. Metode de învăţământ, procedee: explicaţia, demonstraţia, exerciţiul, expunerea, descoperirea, conversaţia, problematizarea, munca independentă, brainstorming, Metoda 3-2-1;
3. Moduri de activitate cu elevii: instruirea în grup; instruirea reciprocă; consolidarea teoriei prin practică; test interactiv pe platforma Google Classroom

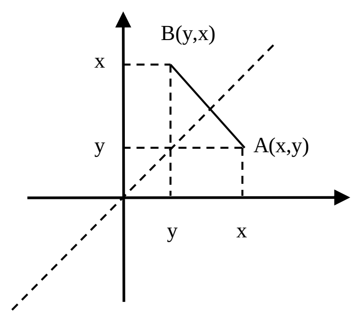
Bibliografie: Năstăsescu, Niţă, Manual cl. a X-a, Ed. Didactică şi Pedagogică
Constantinescu, Zârnă, Auxiliar curricular pentru clasa a X-a, Ed. Crizon
http://www.mathsisfun.com

Etapele lecţiei	Competenţe specifice	Conţinutul lecţiei	Strategii didactice	Modalităţi de evaluare
1. Captarea atenţiei (1 min)		Stabilesc climatul adecvat pentru desfăşurarea actului didactic. Asigur condiţiile optime pentru desfăşurarea lecţiei. Elevii pregătesc cele necesare pentru lecţie.		Observaţia
2. Anunţarea temei şi a competeţelor urmărite (2 min)		Anunţ tema şi obiectivele lecţiei **Tema**: Funcţii inversabile Ce înseamnă inversa unei funcţii? **Obiectivele lecţiei**: - să determinăm inversa unei funcţii bijective (domeniul, codomeniul şi legea care leagă cele două mulţimi), - să recunoaştem funcţiile inversabile, - să construim diagrama cu săgeţi a lui f^{-1} - dându-se graficul unei funcţii bijective, să trasăm graficul inversei - să determinăm inversa unei funcţii multiforme bijective Elevii ascultă cu atenţie şi conştientizează obiectivele.	Problematizarea Expunerea	Observaţia

3. Verificarea cunoştinţelor din lecţia precedentă şi reactualizarea celor necesare comunicării temei noi (6 min)	 C1 C2 C3	O funcție inversă merge în sens opus! Încep cu un exemplu, folosind videoproiectorul: inversa funcției f(x) = 3x+4, obținută mergând în sens opus Înapoi de unde am pornit Aplicând o funcție f şi apoi inversa ei f^{-1} obținem valoarea inițială: $f^{-1}(f(x)) = x$ Orice funcţie are inversă? Pentru a admite inversă, trebuie să avem un singur x pentru fiecare y, adică funcţia trebuie să fie bijectivă. Propun elevilor următoarele întrebări pentru reactualizarea cunoştinţelor dobândite anterior referitoare la funcţiile bijective: 1. Când o funcţie este bijectivă? O funcţie $f : A \to B$ este bijectivă dacă pentru orice element $y \in B$ există exact un element x din A astfel încât $f(x) = y$. 2. Cum recunoaştem o funcţie bijectivă pe diagrama cu săgeţi? Pe diagrama cu săgeţi o funcţie este bijectivă dacă în fiecare element al codomeniului ajunge exact o săgeată. 3. Cum stabilim dacă o funcţie este bijectivă utilizând graficul funcţiei? Dacă orice paralelă la Ox, dusă prin punctele codomeniului, taie graficul în exact un punct. 4. Funcţia de gradul I este bijectivă? Dar cea de gradul al doilea? Funcţia de gradul I este bijectivă, dar cea de gradul al doilea nu este bijectivă.	Problematiza-rea Învăţarea prin descoperire Conversaţia	 Apreciez corectitudinea răspunsurilor elevilor

		Propun un **exerciţiu** : **Ex.1** Fie funcţia $f:R\to R$, $f(x)=5x+4$. Demonstraţi că f este bijectivă. Solicit un elev să prezinte la tablă rezolvarea exerciţiului, stimulând participarea clasei prin diverse întrebări asupra modului de rezolvare. Pentru orice $y\in R$ (codomeniul) ecuaţia $f(x)=y$ sau $5x+4=y$ are soluţia unică $x=\frac{y-4}{5}\in R$ (domeniul). Rezultă că f este bijectivă.	Explicaţia Exerciţiul	Apreciez corectitudinea rezolvării sarcinii
4. Prezentare de material nou (15 min)		**Definiţie**: Fie f:A→B o funcţie bijectivă. Se numeşte ***inversa funcţiei f*** funcţia f^{-1}:B→A care asociază fiecărui element y din B elementul unic x din A astfel încât $f(x)=y$. Deci $f^{-1}(y)=x$. Schema este următoarea: $x\in A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y\in B$ O funcţie care are inversă se spune că este ***inversabilă***. O funcţie este inversabilă dacă şi numai dacă este bijectivă. Dacă f este bijectivă, atunci f^{-1} este bijectivă şi inversa funcţiei f^{-1} este funcţia f. Pentru a construi diagrama cu săgeţi a lui f^{-1}, schimbăm sensul săgeţilor de pe diagrama cu săgeţi a lui f. (Se spune că f^{-1} acţionează „invers” decât f)	Expunerea Explicaţia Conversaţia euristică	Observaţia sistematică a atenţiei Apreciez modul de participare activă la expunerea făcută la tablă

	C1	Exemplu: Funcţia f : {1,2,3}→{a,b,c} dată prin diagrama cu săgeţi din fig.1 este bijectivă şi are inversa din fig.2 fig.1 fig.2 Elevii construiesc diagrama cu săgeţi a lui f^{-1} Propun un **exerciţiu** :		
	C5	**Ex.2** Fie funcţia $f : R \to R$, $f(x) = 5x + 4$. Demonstraţi că f este inversabilă. $\forall\ y \in R$ ecuaţia $f(x) = y \Leftrightarrow$ 5x+4=y $\Leftrightarrow x = \dfrac{y-4}{5} \in R$ $\Rightarrow$ f bijectivă. Am arătat că f este bijectivă. Funcţia inversă $f^{-1} : R \to R$ se obţine asociind oricărui $y \in R$ soluţia unică din R a ecuaţiei $f(x) = y$, deci practic, ea este obţinută la demonstrarea bijectivităţii. $f^{-1} : R \to R,\ f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{y-4}{5}$		
	C1	Cer elevilor să traseze graficele celor două funcţii în acelaşi sistem de axe.	Problematiza- rea	

	C2 C3 C4	Pentru funcţii numerice există o interpretare geometrică a inversei. Astfel, dacă f : A $\to$ B este bijectivă $(A, B \subseteq R)$ şi punctul (x, y) aparţine graficului funcţiei f, atunci $f(x) = y$ de unde $f^{-1}(y) = x$ şi deci punctul (y, x) aparţine graficului funcţiei f^{-1}. Este uşor de văzut că punctele (x, y) şi (y, x) sunt simetrice faţă de prima bisectoare, deci graficele funcţiilor f şi f^{-1} sunt simetrice faţă de prima bisectoare.  Elevii trasează graficele şi descoperă proprietatea.	Învăţarea prin descoperire	
5. Dirijarea învăţării (10 min)	C1 C2	Propun elevilor următoarea sarcină: **Ex.3:** Arătaţi că funcţia $f:[2,4]\to[7,9]$, $f(x) = x+5$ este inversabilă şi determinaţi inversa. $\forall y \in [5,7]$, ecuaţia $f(x) = y \Leftrightarrow x+5 = y \Leftrightarrow x = y-5$ Dacă $7 \le y \le 9 \,\vert -5 \Rightarrow 2 \le y-5 \le 4 \Rightarrow x \in [2,4] \Rightarrow$ $f^{-1}:[7,9]\to[2,4],\ f^{-1}(y) = y-5$	Muncă independentă	Evaluez capacitatea de a trage concluzii.

	C3 C4 C5	**Ex.4:** Fie $f:R-\{3\}\rightarrow R-\{2\}$, $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-3}$ a) arătaţi că funcţia este inversabilă b) fără a determina inversa, calculaţi $f^{-1}(3)$ c) determinaţi inversa. Solicit un elev cu performanţe la tablă pentru a rezolva exerciţiul urmărind etapele menţionate, în timp ce ceilalţi lucrează în perechi comparând cu rezultatul de la tablă: a) $\forall y\in R-\{2\}$, ecuaţia $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{2x+4}{x-3}=y \Leftrightarrow$ $2x+4=xy-3y \Leftrightarrow x=\dfrac{3y+4}{y-2}\neq 3 \Leftrightarrow 3y+4\neq 3y-6$ (A) b) $f^{-1}(3)=x \Leftrightarrow f(x)=3 \Leftrightarrow \dfrac{2x+4}{x-3}=3 \Leftrightarrow 2x+4=3x-9 \Leftrightarrow$ $x=13$ c) $f^{-1}:R-\{2\}\rightarrow R-\{3\}$, $f^{-1}(y)=\dfrac{3y+4}{y-2}$ Solicit un elev să descrie etapele algoritmului pentru determinarea inversei, trecându-le pe un poster.	Lucrul în perechi Demonstraţia	Apreciez cunoaşterea terminologiei şi a simbolurilor matematice. Evaluarea reciprocă Apreciez capacitatea de a generaliza.
6. Fixarea şi sistematizarea cunoştinţelor (8 min)	C3 C5	Propun elevilor următoarea sarcină: **Ex.5:** Arătaţi că funcţia $f:R\rightarrow R$, $f(x)=\begin{cases}2x+1, & dacă\ x\leq 1\\ x+2, & dacă\ x>1\end{cases}$ este inversabilă şi determinaţi inversa.		Observaţia sistematică a elevilor

		Urmăresc activitatea elevilor, răspund dacă sunt întrebată, îi ajut pentru îndeplinirea sarcinii. Solicit cîte un elev să expună la tablă rezultatul obţinut. Pentru orice y real rezolvăm ecuaţia $f(x)=y$ Dacă x≤1, ecuaţia $f(x)=y$ ⇔ 2x+1=y ⇔ $x=\frac{y-1}{2}\le 1 \Rightarrow$ y-1≤ 2⇒y ≤ 3 Dacă x>1, ecuaţia $f(x)=y$ ⇔x+2=y ⇔x = y-2 >1⇒ y>3 Deci , $\forall\ y\in R$, ecuaţia $f(x)=y$ are soluţie unică, deci f este bijectivă. $f^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{y-1}{2},\ dac\breve{a}\ y\le 3\\ y-2,\ \ dac\breve{a}\ y>3\end{cases}$	Muncă independentă	Determin corectitudinea şi abilităţile de argumentare. Apreciez prin note răspunsurile.
7. Asigurarea feed-back-ului, tema pentru acasă (8 min)		Invit elevii să rezolve un test interactiv cu feedback imediat, trimis pe Google Classroom. Au de determinat inversele a patru funcţii simple, având la dispoziţie sugestii de rezolvare. https://www.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions/x2f8bb11595b61c86:inverse-functions-intro/e/algebraically-finding-inverses Spuneţi trei lucruri pe care le-aţi învăţat azi. Spuneţi două lucruri pe care le-aţi considerat interesante. Puneţi o întrebare pe care o mai aveţi încă. Anunţ tema: manual pag.15/ ex.18, 20, culegere pag.110/ ex.4a	Lucru pe platformă Metoda 3-2-1 Asalt de idei	Aprecieri verbale

Fişă de lucru-funcţii inversabile –clasa a X-a

1. Când este o funcţie bijectivă?
2. Cum recunoaştem o funcţie bijectivă pe diagrama cu săgeţi?
3. Cum stabilim dacă o funcţie este bijectivă utilizând graficul funcţiei?
4. Funcţia de gradul I este bijectivă? Dar cea de gradul al doilea?

Ex.1 Fie funcţia $f: R \to R$, $f(x) = 5x + 4$. Demonstraţi că f este bijectivă.

Ex.2 Fie funcţia $f: R \to R$, $f(x) = 5x + 4$. Demonstraţi că f este inversabilă.

Ex.3: Arătaţi că funcţia $f: [2,4] \to [7,9]$, $f(x) = x + 5$ este inversabilă şi determinaţi inversa.

Ex.4: Fie $f: R - \{3\} \to R - \{2\}$, $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$

a) arătaţi că funcţia este inversabilă

b) fără a determina inversa, calculaţi $f^{-1}(3)$

c) determinaţi inversa.

Ex.5: Arătaţi că funcţia $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & dac\breve{a}\ x \le 1 \\ x+2, & dac\breve{a}\ x > 1 \end{cases}$ este inversabilă şi determinaţi inversa.

Tema: manual, pag. 15/ ex. 18, 20, culegere, pag. 110/ ex. 4a