

Examen național de bacalaureat 2020
Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
☐ Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
☐ Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Subiectul I (30 puncte)

1. Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_{27} \sqrt{3} + \log_{\sqrt{6}} \sqrt[3]{16}$.
2. Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile ecuației $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$, să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$.
3. Să se determine numărul funcțiilor strict monotone $f: \{0,1,3\} \rightarrow \{2,4,5,7\}$.
4. Să se calculeze numărul termenilor raționali ai dezvoltării $\left(\sqrt{x}\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}\right)^{2020}$.
5. Dacă vectorii $\vec{u} = \alpha \vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ sunt coliniari și au același sens, calculați valoarea parametrului real α .
6. Calculați raza cercului cu centrul în origine, tangent dreptei de ecuație $2x+3y-13=0$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Fie sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + ay + (2a - 1)z = 1 \\ x + (2a - 1)y + (3a - 2)z = -1 \end{cases}$$
, unde a este un parametru real.
 - a) Pentru $a = 1$ să se determine rangul matricei sistemului.
 - b) Să se arate că pentru orice a real, determinantul matricei sistemului verifică $\det A \leq 0$.
 - c) Să se determine a real astfel încât soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului verifică $x_0^2 = y_0 + z_0$.
2. Fie $G = (-\infty, 1)$ pe care definim legea de compoziție $x * y = x + y - xy$, $(\forall) x, y \in G$.
 - a) Să se arate că $(x * y) * z = x * (y * z)$, $(\forall) x, y, z \in G$.
 - b) Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} x * y = 3 \\ x^2 * y^2 = 5 \end{cases}$$
.
 - c) Să se demonstreze că funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 - x)$ este izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x(x+3)}{(x+2)^2}$.
 - a) Să se calculeze asimptotele funcției f , precizând numărul acestora.
 - b) Să se demonstreze inegalitatea $1 < f(x) < 2$, $(\forall) x < -6$.
 - c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{2} \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(n) \right)^{n^2}$.
2. Fie funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_1^x \arctg^2 t \, dt$.
 - a) Să se calculeze $F''(2)$.
 - b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctg^2 t \, dt}{x^2}$.
 - c) Dacă $h: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \arctg x$, să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între dreptele $x = -1$ și $x = 1$, graficul funcției h și axa Ox .

Examen național de bacalaureat 2020
Matematică M_mate-info
Barem de evaluare și notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

☐ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

☐ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

☐ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I (30 puncte)

1.	$\log_{27} \sqrt{3} = \log_{3^3} 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$, $\log_{\sqrt{8}} \sqrt[3]{16} = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^{\frac{4}{3}} = \frac{8}{9}$ Numărul obținut este $\frac{19}{18}$ și folosind $\{x\} = x - [x], (\forall) x \in \mathbb{R}$ obținem partea fracționară $\frac{1}{18}$	2p 3p
2.	Notăm $t = 2^x, t > 0$ și obținem ecuația $t^2 - 6t + 8 = 0$ cu soluțiile $t_1 = 2, t_2 = 4$ Revenind la substituție, soluțiile ecuației date sunt 1 și 2, de unde avem $x_1^2 + x_2^2 = 5$	2p 3p
3.	Numărul funcțiilor strict crescătoare este $C_4^3 = 4$, egal cu numărul funcțiilor descrescătoare. Deci avem 8 funcții	3p 2p
4.	Termenul general al dezvoltării este $T_{k+1} = C_{2020}^k \left(\sqrt{x} \sqrt{x} \right)^{2020-k} \cdot \left(2\sqrt[3]{x} \right)^k, k \in \{0, 1, \dots, 2020\}$ $T_{k+1} \in \mathbb{Q}$, dacă k este multiplul numărului 12. Numărul termenilor raționali este 169	2p 3p
5.	Condiția din ipoteză este echivalentă cu $\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} $ de unde prin calcul obținem ecuația $-3\alpha + 8 = 5\sqrt{\alpha^2 + 4}$, cu soluția $\alpha = \frac{-3}{2}$, care îndeplinește condiția $\alpha \leq \frac{8}{3}$.	2p 3p
6.	Raza cercului este egală cu distanța de la O la dreapta dată $d = \frac{ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 13 }{\sqrt{2^2 + 3^2}}$ Obținem $r = \sqrt{13}$	3p 2p

Subiectul II (30 puncte)

1. a)	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ Pentru $a = 1$, determinantul lui A este: $\det A =$ $\det A = 0$ și toți minorii de ordin doi sunt de forma $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ rangul matricei $A = 1$	2p 3p
b)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2a-1 \\ 1 & 2a-1 & 3a-2 \end{vmatrix}$ calculul determinantului $\det A = -(a-1)^2 \leq 0$	3p 2p
c)	Sistemul este compatibil determinat și folosind metoda lui Cramer, obținem $\Delta_x = -2a(a-1), \Delta_y = 3(a-1), \Delta_z = -(a-1)$ Soluția sistemului este $\left(\frac{2a}{a-1}, \frac{-3}{a-1}, \frac{1}{a-1} \right)$ Înlocuind în relația $x_0^2 = y_0 + z_0$, obținem ecuația $2a^2 + a - 1 = 0$ cu soluțiile $a = -1, a = \frac{1}{2}$	2p 1p 2p
2. a)	Calculăm pe rând, avem: $(x * y) * z = (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$ $x * (y * z) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$ Avem egalitate $\Rightarrow$ "*" asociativă	2p 2p 1p

b)	$\begin{cases} x * y = 3 \\ x^2 * y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S - P = 3 \\ S^2 - 2P - P^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow S = 2, P = -1, \text{ unde } S = x + y, P = xy$ Ecuția lui Viete $t^2 - 2t - 1 = 0$ are soluțiile $1 \pm \sqrt{2}$ Soluțiile sistemului sunt $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ și $(1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$	2p 1p 2p
c)	Funcția f este bijectivă Condiția de morfism: $f(x_1 * x_2) = f(x_1) + f(x_2), (\forall) x_1, x_2 \in G$	3p 2p

Subiectul III (30 puncte)

1. a)	Calculăm limitele funcției în capetele domeniului de definiție , avem $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală Calculăm limitele laterale în -2 și avem că dreapta $x = -2$ este asimptotă verticală la stânga și la dreapta Funcția f are două asimptote	2p 2p 1p																					
b)	Calculăm derivata funcției $f'(x) = \frac{x+6}{(x+2)^3}$. Ecuția $f'(x) = 0$ are soluția $x = -6$ Construim tabelul de variație <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-6</td><td>-2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$----$</td><td>$+$</td><td>$+$</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>1</td><td>$\nearrow$</td><td>$\underbrace{f(-6)}_{\text{max}}$</td><td>$\searrow$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$\nearrow \nearrow^1$</td></tr></table> Observăm că în $x = -6$ este punct de maxim și avem $1 < f(x) < 2, (\forall) x < -6$	x	$-\infty$	-6	-2	$+\infty$	$f'(x)$	$+$	$+$	0	$----$	$+$	$+$	$+$	$f(x)$	1	$\nearrow$	$\underbrace{f(-6)}_{\text{max}}$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow \nearrow^1$	2p 2p 1p
x	$-\infty$	-6	-2	$+\infty$																			
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$----$	$+$	$+$	$+$																
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\underbrace{f(-6)}_{\text{max}}$	$\searrow$	$-\infty$	$-\infty$	$\nearrow \nearrow^1$																
c)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{2} \cdot \frac{1 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{2 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{3 \cdot 6}{5^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n(n+3)}{(n+2)^2} \right)^{n^2} =$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \right)^{n^2} \stackrel{1^\infty}{=} \frac{1}{e^2}$	2p 3p																					
2.a)	Funcția $g(t) = \arctg^2 t$ este continuă pe $\mathbb{R}$, admite primitive și fie aceasta $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Avem $F(x) = G(x) - G(1)$ cu derivata $F'(x) = G'(x) = g(x) = \arctg^2 x$ Derivata a doua $F''(x) = 2 \frac{\arctg x}{1+x^2} \Rightarrow F''(2) = \frac{2}{5} \arctg 2$	2p 1p 2p																					
b)	Luăm funcția $g(t) = \arctg^2 t, t \in \mathbb{R}$, continuă $\Rightarrow$ admite primitive. $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. o primitivă pentru $g \Rightarrow \int_0^x \arctg^2 t dt = G(x) - G(0)$ Aplicăm regula lui l'Hospital $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} \cdot \frac{x}{1+x^2} = 0$	2p 3p																					
c)	$A = \int_{-1}^1 \arctg x dx = \int_{-1}^0 -\arctg x dx + \int_0^1 \arctg x dx =$ $2 \int_0^1 \arctg x dx = \frac{\pi}{2} - 2 \ln 2$	2p 3p																					