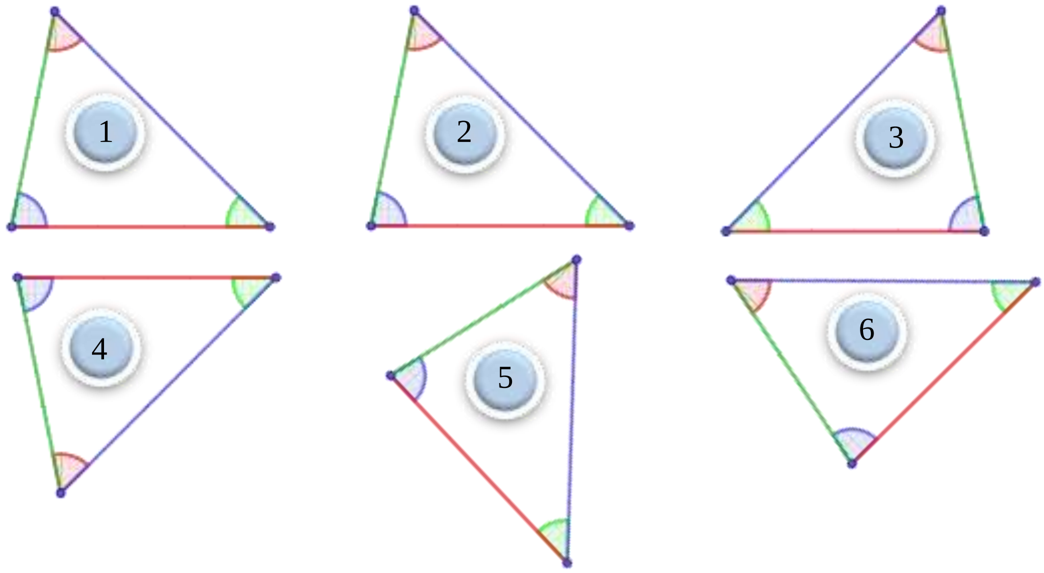
CONGRUENȚA TRIUNGHIURILOR

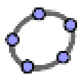
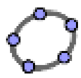
DESCOPERIM....

Activitatea 1: Observăm cu atenție triunghiurile de mai jos:



- Toate triunghiurile au laturile colorate identic de aceeași lungime
- Toate triunghiurile au unghiurile colorate identic de aceeași măsură
- Prin glisare, triunghiul 2 se suprapune peste triunghiul 1
- Prin simetrie față de o dreaptă verticală, triunghiul 3 se suprapune peste triunghiul 2
- Prin simetrie față de o dreaptă orizontală, triunghiul 4 se suprapune peste triunghiul 1
- Rotite, triunghiurile 5 și 6 se suprapun peste triunghiurile 1 și 2

Resurse GeoGebra (click pe imagine): Triunghiuri care se suprapun

prin translație  prin rotație 

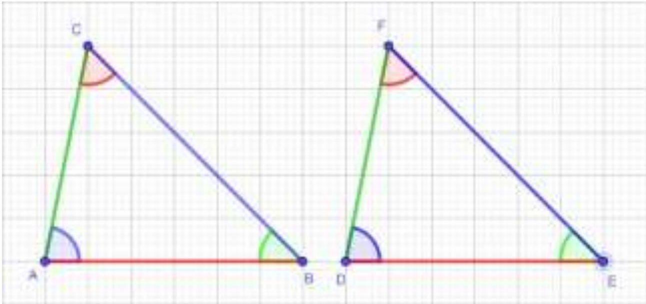
Definiție: Două triunghiuri ABC și DEF care coincid prin suprapunere se numesc congruente.

Notăm: $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$

Elementele (laturi, unghiuri) care se suprapun se numesc omoloage[1].

Când scriem două triunghiuri congruente, trebuie să avem grijă ca vârfurile unghiurilor omoloage să fie pe aceeași poziție.

[1] omolog = care corespunde, care se află în corespondență, care este la fel
origine: omos (aceeași/același) + logos (cuvânt)



Δ A B C ≡ Δ D E F

Proprietate: Dacă două triunghiuri sunt congruente, atunci laturile și unghiurile omoloage sunt congruente.

$\Delta ABC \equiv \Delta DEF \Rightarrow$ 1. $AB \equiv DE$, $BC \equiv EF$, $AC \equiv DF$

2. $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle E$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle F$

Activitatea 2: Numiți cele șase triunghiuri de mai sus și scrieți elementele congruente pentru perechile:

1 2

2 3

1 4

5 6

Ne amintim...

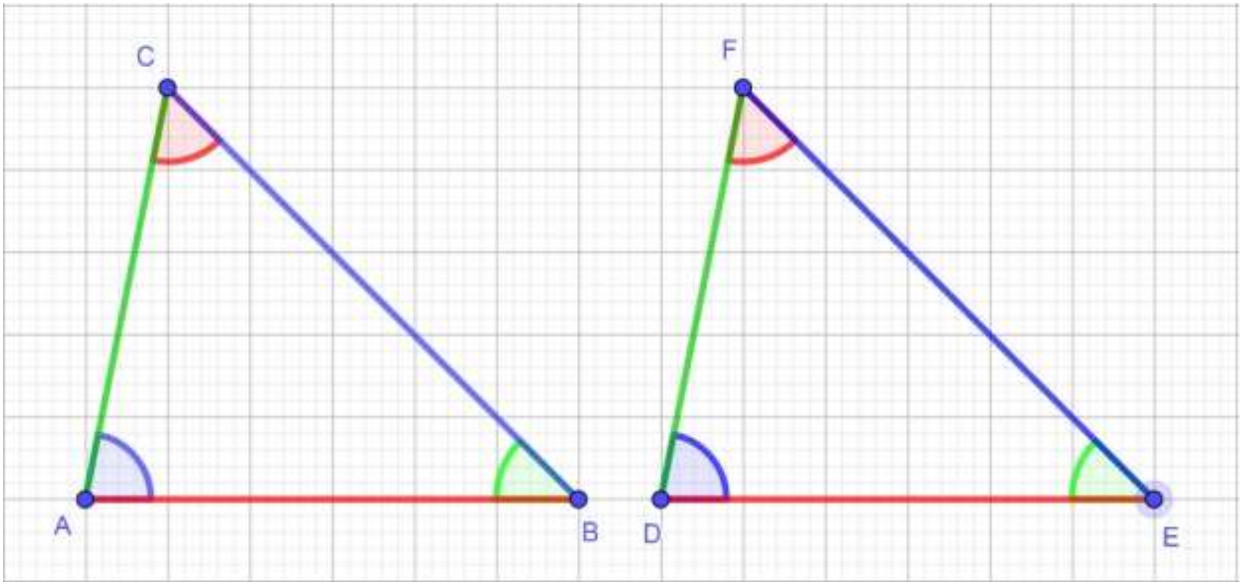
Putem construi în mod unic triunghiuri cu mărimi date (lungimi de laturi, măsuri de unghiuri) în trei situații:

1. când cunoaștem lungimile a două laturi și măsura unghiului dintre acestea (cazul LUL)
2. când cunoaștem lungimea unei laturi și măsurile unghiurilor de la capetele acesteia (cazul ULU)
3. când cunoaștem lungimile celor trei laturi (cazul LLL)

Consecință: Avem trei cazuri în care putem afirma că două triunghiuri sunt congruente.

I. Cazul LUL (latură, unghi, latură)

Teoremă: Dacă două triunghiuri au două perechi de laturi congruente și unghiurile formate de acestea congruente, atunci triunghiurile sunt congruente



$$\left.\begin{array}{l} AB \equiv DE \\ \sphericalangle A \equiv \sphericalangle D \\ AC \equiv DF \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$$

Activitatea 3: Scrieți alte trei perechi de elemente congruente din care să rezulte congruența celor două triunghiuri.

Rezolvăm:

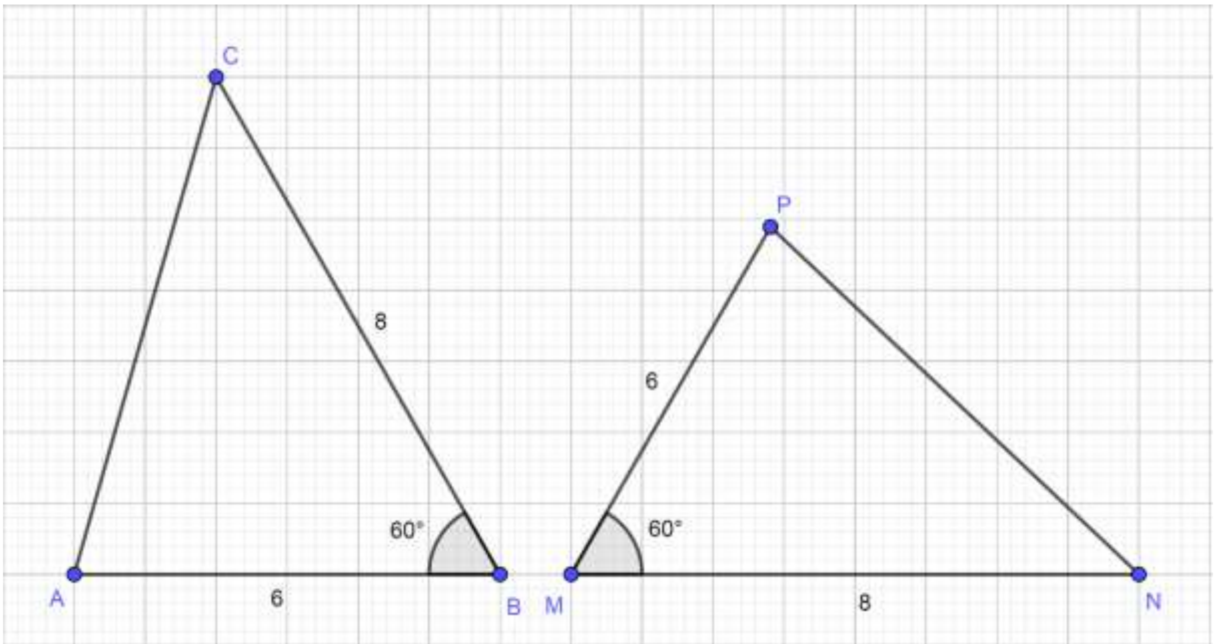
Triunghiurile ABC și MNP au AB = 6 cm, BC = 8 cm și ∢B = 60°, respectiv MN = 8 cm, MP = 6 cm și ∢M = 60°. Stabiliți dacă cele două triunghiuri sunt congruente.

Ipoteza	ΔABC: AB = 6 cm, BC = 8 cm, ∢B = 60° ΔMNP: MN = 8 cm, MP = 6 cm, ∢M = 60°
Concluzia	ΔABC ≡ ΔMNP ?

Construim figura corespunzătoare datelor problemei:

ΔABC: un segment de 6 cm (latura AB), unghiul de 60° în vârful B și punctul C pe semidreapta în B situat la 8 cm de punctul B

ΔMNP: un segment de 8 cm (latura MN), unghiul de 60° în vârful M și punctul P pe semidreapta în M situat la 6 cm de punctul M



Demonstrație

Din ipoteză avem: AB ≡ MP, BC ≡ MN (laturi omoloage) și ∢B ≡ ∢M (unghiuri omoloage). Celelalte elemente omoloage sunt AC cu PN, ∢A cu ∢P (opuse laturilor de 8 cm) și ∢C cu ∢N (opuse laturilor de 6 cm).

AB ≡ MP

∢B ≡ ∢M ⇒ ΔABC ≡ ΔPMN

BC ≡ MN

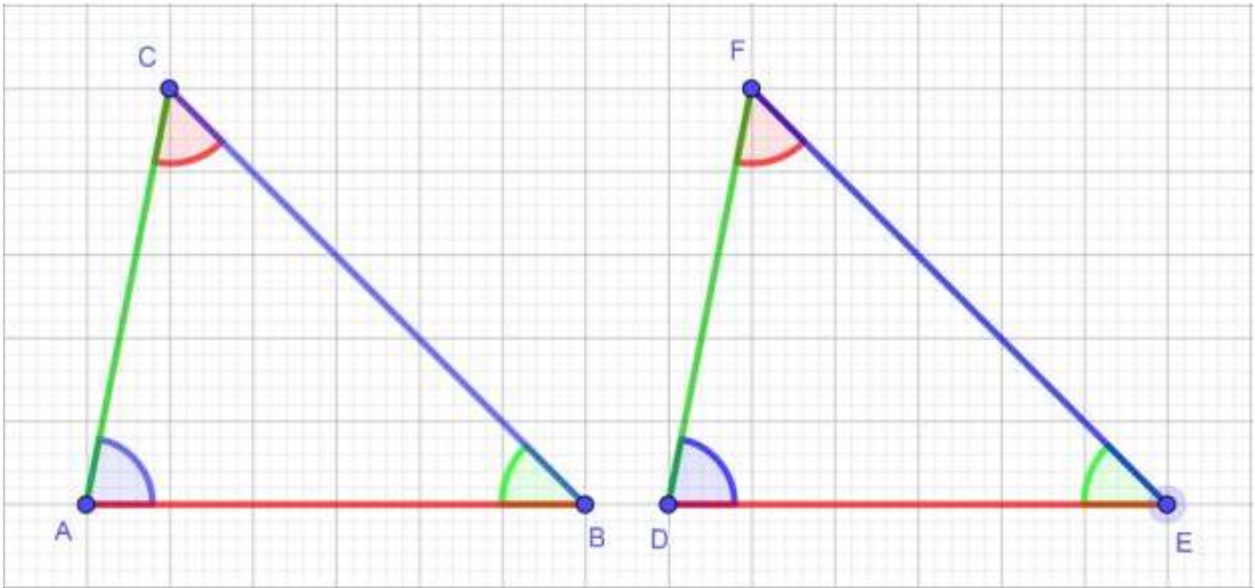
Consecință: Cazul CC (catetă, catetă) pentru triunghiuri dreptunghice

Teoremă: Dacă două triunghiuri dreptunghice au catetele două câte două congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

Demonstrație:
În orice triunghi dreptunghic, catetele sunt laturile care formează unghiul drept, deci suntem în cazul general LUL unde L = prima catetă, U = unghiul de 90°, L = a doua catetă.

II. Cazul ULU (unghi, latură, unghi)

Teoremă: Dacă două triunghiuri au două perechi de unghiuri congruente și laturile comune acestora congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle A \equiv \sphericalangle D \\ AB \equiv DE \\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle E \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$$

Activitatea 4: Scrieți alte trei perechi de elemente congruente din care să rezulte congruența celor două triunghiuri.

Rezolvăm:

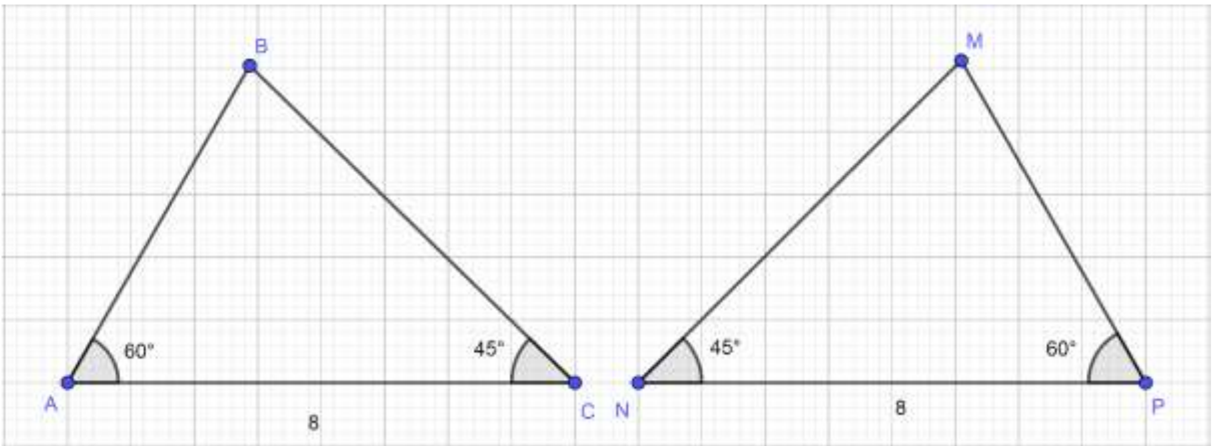
Triunghiurile ABC și MNP au AC = 8 cm, ∢A = 60° și ∢C = 45°, respectiv NP = 8 cm, ∢N = 45° și ∢P = 60°. Stabiliți dacă cele două triunghiuri sunt congruente.

Ipoteza	ΔABC: AC = 8 cm, ∢A = 60°, ∢C = 45° ΔMNP: NP = 8 cm, ∢N = 45°, ∢P = 60°
Concluzia	ΔABC ≡ ΔMNP ?

Construim figura corespunzătoare datelor problemei:

ΔABC: un segment de 8 cm (latura AC), unghiul de 60° în vârful A, unghiul de 45° în vârful C și punctul B la intersecția celor două semidrepte

ΔMNP: un segment de 8 cm (latura NP), unghiul de 45° în vârful N, unghiul de 60° în vârful P și punctul M la intersecția celor două semidrepte



Demonstrație

Din ipoteză avem: AC ≡ NP (laturi omoloage) și ∢A ≡ ∢P, ∢C ≡ ∢N (unghiuri omoloage). Celelalte elemente omoloage sunt ∢B cu ∢M (opuse laturilor de 8 cm) și laturile AB cu MP, BC cu MN.

∢A ≡ ∢P

AC ≡ NP | ⇒ ΔABC ≡ ΔPMN

∢C ≡ ∢N

Observație:

Teorema poate fi aplicată indiferent de poziția celor două perechi de unghiuri congruente.

Justificare:

În orice triunghi, măsura unui unghi este egală cu diferența dintre 180° și suma măsurilor celorlate două unghiuri.

Suma măsurilor celor două perechi de unghiuri congruente este aceeași în ambele triunghiuri, deci și unghiurile necunoscute sunt congruente.

Consecința 1: Cazul IU (ipotenuză, unghi) pentru triunghiuri dreptunghice

Teoremă: Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele congruente și o pereche de unghiuri ascuțite congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

Demonstrație:
În orice triunghi dreptunghic, unghiurile ascuțite sunt complementare (suma măsurilor lor este egală cu 90°). Deci, dacă o pereche de unghiuri ascuțite sunt congruente, cealaltă pereche (complementele lor) vor fi tot congruente.
Prin urmare suntem în cazul ULU, unde U = primul unghi ascuțit, L = ipotenuză, U = al doilea unghi ascuțit.

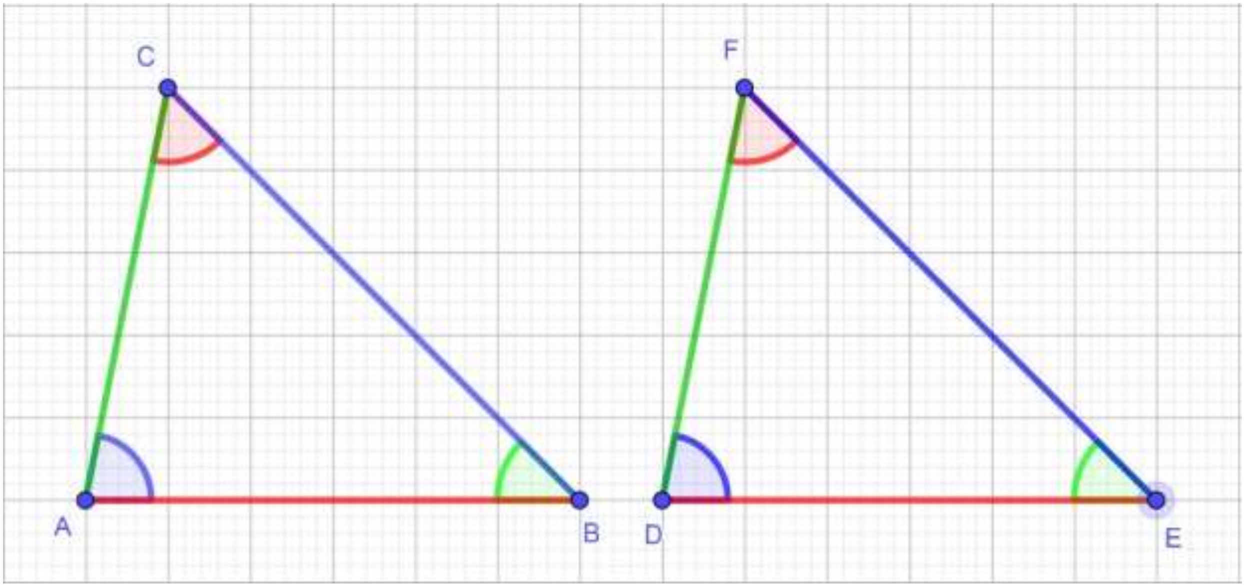
Consecința 2: Cazul CU (catetă, unghi) pentru triunghiuri dreptunghice

Teoremă: Dacă două triunghiuri dreptunghice au o pereche de catete congruente și o pereche de unghiuri ascuțite congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

Demonstrație:
În orice triunghi dreptunghic, unghiurile ascuțite sunt formate catete cu ipotenuza.
a) Dacă unghiurile ascuțite congruente au ca laturi cele două catete congruente, suntem în cazul ULU unde U = unghiul ascuțit, L = catetă, U = unghiul de 90°.
b) Dacă cele două catete congruente nu sunt laturi ale unghiurilor ascuțite congruente, vor fi laturi ale celorlalte două unghiuri ascuțite, care sunt tot congruente (vezi mai sus). Deci suntem tot în cazul ULU unde U = unghiul ascuțit, L = catetă, U = unghiul de 90°.

III. Cazul LLL (latură, latură, latură)

Teoremă: Dacă două triunghiuri au laturile două câte două respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.



$$\left.\begin{array}{l} AB \equiv DE \\ BC \equiv EF \\ AC \equiv DF \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta DEF$$

Rezolvăm:

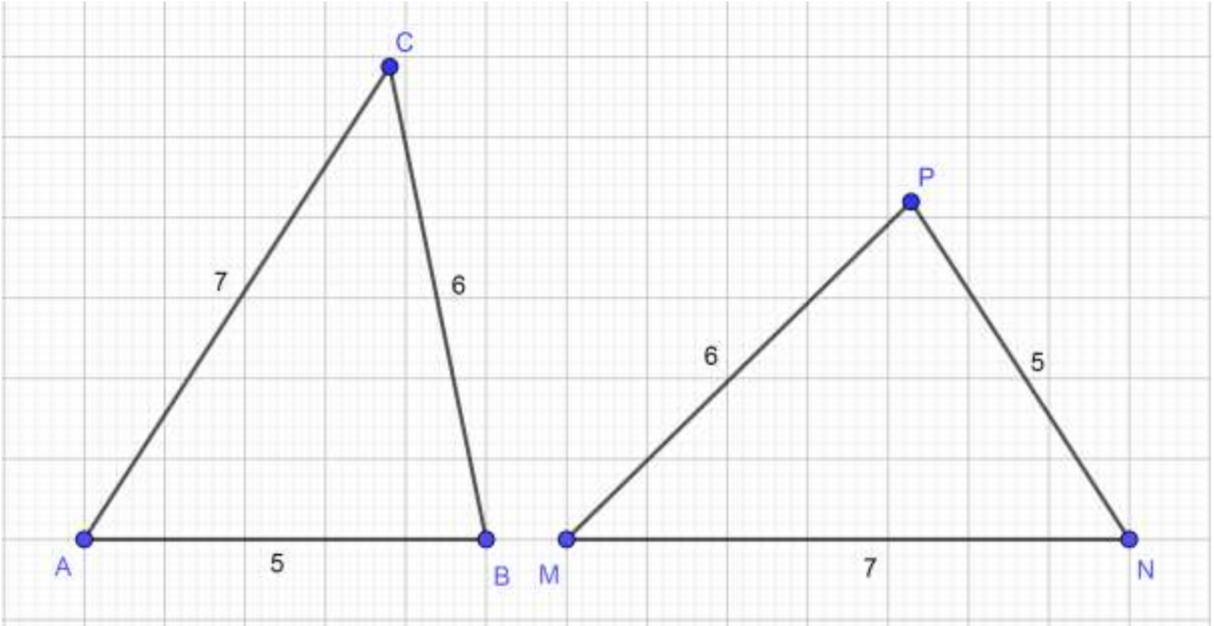
Triunghiurile ABC și MNP au AB = 5 cm, BC = 6 cm și AC = 7 cm, respectiv MN = 7 cm, NP = 5 cm și MP = 6 cm. Stabiliți dacă cele două triunghiuri sunt congruente.

Ipoteza	ΔABC: AB = 5 cm, BC = 6 cm, AC = 7 cm ΔMNP: MN = 7 cm, NP = 5 cm, MP = 6 cm
Concluzia	ΔABC ≡ ΔMNP ?

Construim figura corespunzătoare datelor problemei:

ΔABC: un segment de 5 cm (latura AB), un arc de cerc cu raza 7 cm (latura AC) și centrul în punctul A, un arc de cerc cu raza 6 cm (latura BC) și centrul în punctul B și punctul C la intersecția celor două arce de cerc

ΔMNP: un segment de 7 cm (latura MN), un arc de cerc cu raza 6 cm (latura MP) și centrul în punctul M, un arc de cerc cu raza 5 cm (latura NP) și centrul în punctul N și punctul P la intersecția celor două arce de cerc



Demonstrație

Din ipoteză avem: AB ≡ NP, BC ≡ MP și AC ≡ MN (laturi omoloage).

Unghiurile omoloage sunt ∢A cu ∢N (opuse laturilor de 6 cm), ∢B cu ∢P (opuse laturilor de 7 cm) și ∢C cu ∢M (opuse laturilor de 5 cm).

$$\left.\begin{array}{l} AB \equiv NP \\ BC \equiv MP \\ AC \equiv MN \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta NPM$$

Consecință: Cazul IC (ipotenuză, catetă) pentru triunghiuri dreptunghice

Teoremă: Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele congruente și o pereche de catete congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

Demonstrație:

Cunoscând ipotenuza și o catetă, construim în mod unic triunghiul dreptunghic.

Etape:

1. Trasăm cateta
2. Construim unghiul drept în unul dintre capetele catetei
3. Trasăm un arc de cerc cu centrul în celălalt capăt al catetei și raza egală cu ipotenuza
4. Al treilea vârf este intersecția arcului de cerc cu latura unghiului drept, deci ”cunoaștem” și a doua catetă

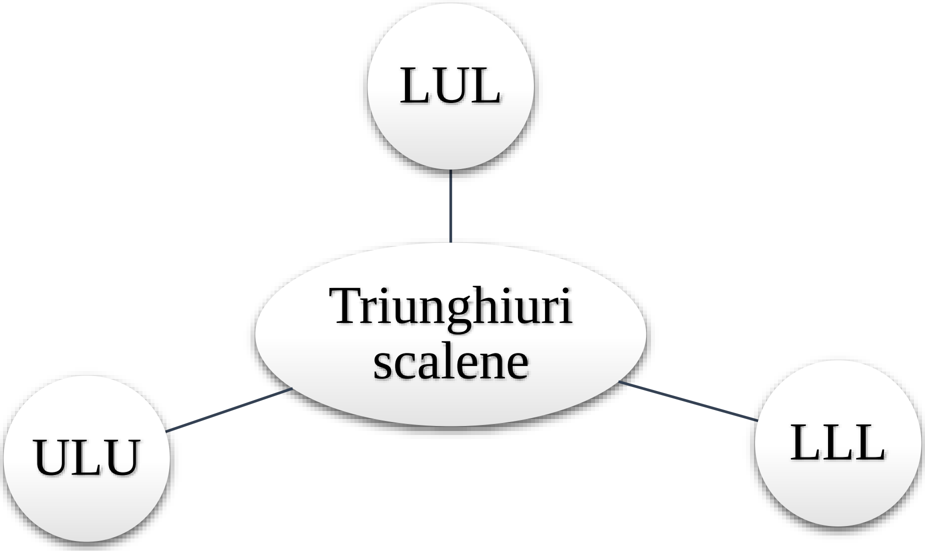
Prin urmare suntem în cazul LLL, unde L = prima catetă, L = ipotenuza, L = a doua catetă.

REȚINEM!

Avem trei cazuri generale de congruență pentru triunghiuri:

1. LUL: două perechi de laturi și unghiurile dintre acestea sunt congruente
2. ULU: o pereche de laturi și unghiurile de la capetele acestora sunt congruente
3. LLL: trei perechi de laturi congruente

Cazurile generale de congruență sunt aceleași cu cele de construcție a triunghiurilor.



Avem patru cazuri speciale de congruență pentru triunghiuri dreptunghice:

1. CC: catetele sunt două câte două congruente
2. IU: ipotenuzele și o pereche de unghiuri ascuțite sunt congruente
3. CU: o pereche de catete și o pereche de unghiuri ascuțite sunt congruente
4. IC: ipotenuzele și o pereche de catete ascuțite sunt congruente