

BAZE DE NUMERAȚIE

I. SĂ NE AMINTIM

1. Baza de numerație 10

Numărul 2345 se citește două mii, trei sute, patru zeci și cinci, adică

$$2345 = 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Scrierea unui număr cu ajutorul puterilor lui 10 se numește scriere în baza 10.

În scrierea în baza 10 se utilizează 10 cifre mai mici ca 10: 0, 1, 2, ..., 9

Scrierea unui număr în baza 10:

Orice număr $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$ se scrie în baza 10 astfel:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

Observăm: Fiecare cifră a numărului se înmulțește cu puterea lui 10 cu exponentul egal cu numărul de cifre care se află la dreapta cifrei curente.

2. Alte baze de numerație

Similar scrierii în baza 10, putem defini alte baze de numerație.

2.a. Baza de numerație 2

Scrierea unui număr în baza 2 utilizează numai cifrele 0 și 1 (sistem binar).

Exemple: $1011_{(2)}$, $101010_{(2)}$

2.b. Baze de numerație x , $3 \leq x \leq 9$

Scrierea unui număr în baza x utilizează x cifre mai mici ca x : 0, 1, 2, ..., $x-1$

Exemple: $1234_{(5)}$, $123456_{(7)}$

2.c. Baza de numerație 16

Scrierea unui număr în baza 16 utilizează 16 cifre mai mici ca 16, respectiv 0, 1, 2, ..., 9, A (10), B (11), C (12), D (13), E (14), F (15).

Exemple: $12AB_{(16)}$, $FE94_{(16)}$

II. TRANSFORMAREA UNUI NUMĂR DIN BAZA x ÎN BAZA 10

Regulă:

Orice număr $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 a_0}$ în baza x se transformă în baza 10 scriindu-l cu ajutorul puterilor lui x astfel:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

Observație: Ca și la scrierea în baza 10, fiecare cifră a numărului se înmulțește cu puterea lui x cu exponentul egal cu numărul de cifre care se află la dreapta cifrei curente.

Exemplu: Transformăm în baza 10 numerele $2345_{(6)}$, $2345_{(7)}$, $2345_{(8)}$

- $2345_{(6)} = 2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0$
- $2345_{(7)} = 2 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0$
- $2345_{(8)} = 2 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0$

Algoritm pentru transformarea unui număr din baza x ($2 \leq x \leq 9$) în baza 10

```
1  #include <iostream>
2
3  using namespace std;
4  int n, x, aux, p, r, nr10;
5  int main()
6  {
7      cout<<"Baza in care este scris numarul:"<<cin>>x; //x reprezinta baza in care este scris numarul
8      cout<<"Numarul in baza "<<x<<" este:"<<cin>>n; //n reprezinta numarul pe care il transformam in baza 10
9      aux=n;
10     nr10=0; //va contine numarul n transformat in baza 10
11     p=1; // reprezinta puterile lui x (initial x la puterea 0 este 1)
12     while (n!=0)
13     {
14         r=n%10; //calculeaza restul impartirii lui n la 10
15         nr10=nr10+r*p; //formez numarul in baza 10
16         p=p*x; // creste puterea lui p
17         n=n/10; // n devine catul impartirii numarului la baza
18     }
19     cout << "Valoarea numarului "<<aux<<" transformat din baza "<<x<<" in baza 10 este:" <<nr10;
20     return 0;
21 }
22
```

Aplicații:

1. Se citesc două numere naturale x scris în baza b_1 și y în baza b_2 . Să se scrie un program care afișează numărul mai mare în baza 10 sau mesajul „Numerele sunt egale”.

Exemplu:

Dacă se citește $x=123$ în baza 7 și $y=231$ în baza 5 se va afișa Numerele sunt egale.

Dacă se citește $x=1113$ în baza 6 și $y=3314$ în baza 4 se va afișa 1113.

2. Se dau n numere naturale și o bază x ($2 \leq x \leq 9$). Să se scrie un program care stabilește care dintre cele n numere sunt scrise în baza x și calculează suma acestora în baza 10.

Exemplu:

Pentru $n=7$, $x=6$ și numerele 145, 1234, 7412, 554, 6987, 56, 4412 se va afișa 1605 (numerele care sunt în baza 6: 145, 1234, 554, 4412).

3. Se dau n numere naturale scrise în baza 2. Să se scrie un program care afișează câte dintre acestea sunt numere prime în baza 10.

Exemplu:

Pentru $n=7$ și numerele 1110, 10001, 1011011, 11111, 10010000, 10011001, 111011 se va afișa 4.

III. TRANSFORMAREA UNUI NUMĂR DIN BAZA 10 ÎN BAZA x

Transformarea numărului N din baza 10 în baza x se face prin împărțiri succesive la x .

Algoritm:

1. Numărul N se împarte la x și se obțin câtul C_1 și restul R_1 , $R_1 < x$
2. Câtul împărțirii anterioare se împarte la x
3. Pasul 2 se repetă până când se obține un cât C_n mai mic ca x
4. Cifrele numărului N scris în baza x sunt, în ordine de la stânga la dreapta:
 $C_n, R_n, R_{n-1}, R_{n-2}, \dots, R_2, R_1$

Exemple: Transformăm:

i. 231 în baza 2

$$231 : 2 = 115 \text{ rest } 1$$

$$115 : 2 = 57 \text{ rest } 1$$

$$57 : 2 = 28 \text{ rest } 1$$

$$28 : 2 = 14 \text{ rest } 0$$

$$14 : 2 = 7 \text{ rest } 0$$

$$7 : 2 = 3 \text{ rest } 1$$

$$3 : 2 = 1 \text{ rest } 1$$

$$1 : 2 = 0 \text{ rest } 1$$

Concluzia: $231_{(10)} = 11100111_{(2)}$

ii. 12369 în baza 7

$$12369 : 7 = 1767 \text{ rest } 0$$

$$1767 : 7 = 252 \text{ rest } 3$$

$$252 : 7 = 36 \text{ rest } 0$$

$$36 : 7 = 5 \text{ rest } 1$$

$$5 : 7 = 0 \text{ rest } 5$$

Concluzia: $12369_{(10)} = 51030_{(7)}$

iii. 3214785 în baza 16

$$3214785 : 16 = 200924 \text{ rest } 1$$

$$200924 : 16 = 12557 \text{ rest } 12$$

$$12557 : 16 = 784 \text{ rest } 13$$

$$784 : 16 = 49 \text{ rest } 0$$

$$49 : 16 = 3 \text{ rest } 1$$

$$3 : 16 = 0 \text{ rest } 3$$

Concluzia: $3214785_{(10)} = 310DC1_{(16)}$

Algoritm pentru transformarea unui număr din baza 10 în baza x ($2 \leq x \leq 9$)

```
1 #include <iostream>
2
3 using namespace std;
4 int n, x, aux, p, r, nrx;
5 int main()
6 {
7     cout<<"Numarul in baza 10:"<<cin>>n; //n reprezinta numarul pe care il transformam in baza x
8     cout<<"Baza in care doresc sa transform numarul:"<<cin>>x; //x reprezinta baza in care se transforma numarul
9     aux=n;
10    nrx=0; //va contine numarul n transformat in baza x
11    p=1; //reprezinta puterile lui 10 (initial 10 la puterea 0 este 1)
12    while (n!=0)
13    {
14        r=n%x; //calculeaza restul impartirii lui n la b
15        nrx=nrx+r*p; //formez numarul in baza b
16        p=p*10; //creste puterea lui p
17        n=n/x; // n devine catul impartirii numarului la baza
18    }
19    cout << "Valoarea numarului "<<aux<<" in baza "<<x<<" este:" <<nrx;
20    return 0;
21 }
22
```

Aplicații:

1. Se citește un număr natural n și un șir de n numere naturale în baza 10. Să se scrie un algoritm care afișează cel mai mare număr din șir pentru care reprezentarea în baza 2 a oglinditului numărului are număr egal de cifre de 0 și 1.

Exemplu:

Pentru n=6 și numerele 24, 402, 124, 622, 897, 522 se va afișa 622.

2. Se citește un număr natural n și un șir de n numere naturale în baza 10. Să se scrie un algoritm care determină c.m.m.m.c dintre cel mai mic și cel mai mare număr din șir și îl transformă în baza b ($(2 \leq b \leq 9)$).

Exemplu:

Pentru $n=6$, $b=5$ și numerele 204, 48, 124, 456, 253, 322 se va afișa 12122.

3. Se citește un număr natural n și un șir de n numere naturale în baza 10. Să se scrie un algoritm care calculează și afișează suma numerelor pătrate perfecte precum și transformarea acestora în baza b ($(2 \leq b \leq 9)$).

Exemplu:

Pentru $n=7$, $b=8$ și numerele 204, 48, 144, 456, 361, 322, 625 se va afișa 1130 și 2152.

IV. TRANSFORMAREA UNUI NUMĂR DIN BAZA x ÎN BAZA y

Transformarea numărului N din baza x în baza y se face prin trecerea sa din baza x în baza 10 urmată de trecerea din baza 10 în baza y .

Exemplu: Transformăm $12345_{(6)}$ în baza 16

$$12345_{(6)} = 1 \cdot 6^4 + 2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0 = 2196 + 432 + 108 + 24 + 5 = 2765$$

$$2765 : 16 = 172 \text{ rest } 13$$

$$172 : 16 = 10 \text{ rest } 12, \text{ de unde } 2765 = ACD_{(16)}$$

Concluzia: $12345_{(6)} = ACD_{(16)}$

Algoritm pentru transformarea unui număr din baza x ($2 \leq x \leq 9$) în baza y ($2 \leq y \leq 9$)

```

1  #include <iostream>
2
3  using namespace std;
4  int n,x,y,nr10,nry,p,aux,r;
5  int main()
6  {
7      cin>>n>>x>>y;//citeste numarul n si cele doua baze x si y
8      // transformăm numărul n din baza x în baza 10
9      p=1;
10     nr10=0;//va contine transformarea numarului x in baza 10
11     aux=n;
12     while(aux!=0)
13     {
14         r=aux%10;
15         nr10=nr10+r*p;
16         p=p*x;
17         aux=aux/10;
18     }
19     // transformăm numărul nr10 din baza 10 în baza y
20     p=1;
21     nry=0;
22     aux=nr10;
23     while(aux!=0)
24     {
25         r=aux%y;
26         nry=nry+r*p;
27         p=p*y;
28         aux=aux/y;
29     }
30     cout << "Transformarea numarului " <<n<<" din baza "<<x<<" in baza " <<y<<" este:"<<nry;
31     return 0;
32 }
```

Caz particular: Transformarea unui număr N din baza x în baza x^p

Știm că

$$N = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

Din regulile de calcul cu puteri rezultă că, pentru orice $0 \leq k \leq n$ avem:

$$a_k \cdot x^k = a_k \cdot x^{c \cdot p + r} = a_k \cdot x^{c \cdot p} \cdot x^r = a_k \cdot (x^p)^c \cdot x^r = a_k \cdot x^r \cdot y^c$$

Cum $a_k \cdot x^r$ este cifră în baza x^p (justificați), deducem că scrierea lui N în baza x^p este:

$$\sum a_k \cdot x^{k \pmod p} \cdot y^{\left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor}$$

Exemplu: Analizăm transformarea numărului $2020_{(10)}$ în baza 2, baza 8 și baza 16.

$$16=2^4$$

$$8=2^3$$

$$2020_{(10)}=3744_{(8)}$$

$$2020_{(10)}=7E4_{(16)}$$

$$2020_{(10)}=11111100100_{(2)}$$

• Dacă grupăm cifrele în baza 2 câte 3 (deoarece $8=2^3$) de la dreapta la stânga vom obține:

$$2020_{(10)}=11.111.100.100_{(2)}$$

$$11_{(2)}=3_{(8)}$$

$$111_{(2)}=7_{(8)}$$

$$100_{(2)}=4_{(8)}$$

$$100_{(2)}=4_{(8)}$$

• Dacă grupăm cifrele în baza 2 câte 4 (deoarece $16=2^4$) de la dreapta la stânga vom obține:

$$2020_{(10)}=111.1110.0100_{(2)}$$

$$111_{(2)}=7_{(16)}$$

$$1110_{(2)}=E_{(16)}$$

$$0100_{(2)}=4_{(16)}$$

Pentru a transforma un număr din baza 2 în baza 2^p vom proceda astfel:

- numărul în baza 2 se împarte în grupe de câte p cifre de la dreapta la stânga. În prima grupă pot rămâne mai puțin de p cifre.
- fiecare grupă de p cifre o transformăm în baza 2^p , obținând câte o cifră.
- scriem cifrele corespunzătoare fiecărei grupe pentru a obține rezultatul în baza 2^p .

Pentru a transforma un număr din baza 2^p în baza 2 vom proceda astfel:

- fiecare cifră a numărului o transformăm din baza 2^p în baza 2 și astfel vom obține pentru fiecare cifră un șir cu cel mult 4 cifre de 0 și 1.
- în situația în care șirul conține mai puțin de 4 cifre, îl completăm cu zerouri nesemnificative (adăugăm în stânga 0 până ajungem la 4 cifre), cu excepția grupului corespunzător primei cifre.
- scriem șirurile de 4 cifre în ordine și obținem reprezentarea numărului în baza 2.

Exemplu: Transformăm $7E4_{(16)}$ în baza 2:

$$7_{(16)}=111_{(2)}$$

$$E_{(16)}=1110_{(2)}$$

$$4_{(16)}=0100_{(2)}$$

$$\text{Reprezentarea în baza 2 este: } 7E4_{(16)}=111\ 1110\ 0100_{(2)}$$

Transformăm $3744_{(8)}$ în baza 2:

$$3_{(8)} = 11_{(2)}$$

$$7_{(8)} = 111_{(2)}$$

$$4_{(8)} = 100_{(2)}$$

$$4_{(8)} = 100_{(2)}$$

Reprezentarea în baza 2 este: $3744_{(8)} = 11\ 111\ 100\ 100_{(2)}$

Aplicații:

1. Se citește un număr natural n . Să se scrie un program care determină cea mai mică bază în care ar fi putut fi scris acesta. Dacă baza este 10 se va afișa mesajul "Numar in baza 10" și se afișează transformarea acestuia într-o bază y ($2 \leq y \leq 9$), altfel se afișează baza găsită și transformarea acestuia într-o bază y ($2 \leq y \leq 9$).

Exemplu:

Pentru $n = 4512$, $y = 5$ se va afișa 6 și 13202

Pentru $n = 189$, $y = 6$ se va afișa Numar in baza 10 și 513.

2. Se citește un număr natural n și un șir de n numere în baza 2 (numerele din șir $\leq 10^9$). Folosind algoritmul de transformare a unui număr din baza 2 în baza 2^p prezentat mai sus scrieți un program care afișează pe câte un rând pentru fiecare număr valoarea numărului în baza 4 și în baza 8.

Exemplu:

Pentru $n = 5$ și numerele 111111001, 11100111, 10101011, 11100, 110011 va afișa

13321 771

3213 347

2223 253

130 34

303 63

Bibliografie:

1. Tudor Sorin, "Informatică. Manual pentru clasa a IX-a", Editura L&S Infomat, București, 2004
2. Mihaela Veronica Stan, Mihaela Vasile, Radu Boriga, Florin Pop, Carmen Minca, Adrian Stan, Ștefania Penea, "Algoritmi. Culegere de problem clasa a IX-a", Editura L&S Soft, București, 2004