

Principiul lui Dirichlet- aplicații în informatică

Enunț: Dacă distribuim n obiecte în k cutii atunci cel puțin o cutie va conține cel puțin $\lceil n/k \rceil$ obiecte. Demonstrația acestui principiu se face prin reducere la absurd: dacă în fiecare cutie s-ar afla mai puțin decât $\lceil n/k \rceil$ obiecte, atunci numărul total de obiecte ar fi mai mic decât $k \times \lceil n/k \rceil$, adică mai mic decât n .

Exemple:

- Dacă avem trei pantofi, atunci avem sigur cel puțin doi pantofi drepi sau cel puțin doi pantofi stângi.
- Pentru orice mulțime care conține 7 pătrate perfecte există cel puțin două elemente ale acesteia a căror diferență se divide cu 10.

Soluție: Un pătrat perfect se poate termina cu una dintre următoarele cifre: 0, 1, 4, 5, 6 sau 9. Înseamnă că resturile posibile la împărțirea unui pătrat perfect la 10 sunt în mulțimea formată cu aceste cifre (0, 1, 4, 5, 6, 9). Cum sunt 6 resturi posibile și 7 numere rezultă că vor fi cel puțin două numere cu același rest; diferența lor va fi divizibilă cu 10.

- Fie N perechi de șosete de culori diferite. Care este numărul minim de șosete care trebuie extrase din sertar astfel încât să fim siguri că avem două șosete de aceeași culoare?

Soluție: Avem N cutii pentru câte o culoare. Conform principiului cutiei, dacă alegem $N+1$ șosete, vom avea cel puțin două șosete de aceeași culoare. Răspunsul este $N+1$.

- Pentru oricare mulțime formată din șase numere întregi există două numere a căror diferență este divizibilă cu 5.

Soluție: Fie 5 cutii etichetate cu numerele 0,1,2,3,4 reprezentând resturile împărțirii numerelor date la 5. Repartizăm în aceste cutii cele șase numere întregi funcție de restul împărțirii la 5 al fiecăruia dintre acestea. Cum numere ("obiecte") sunt mai multe decât cutii, conform principiului Dirichlet, există cel puțin o cutie ce conține mai mult decât un obiect. Deci există cel puțin două numere care sunt în aceeași cutie. Prin urmare, există două numere cu același rest la împărțirea cu 5. Pentru aceste două numere diferența lor este divizibilă cu 5.

- Fie M o mulțime formată din n numere întregi. Există o submulțime a lui M cu proprietatea că suma elementelor sale este divizibilă cu n .

Soluție: Fie $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ și fie următoarele n sume:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Avem n sume și două cazuri posibile:

1. Există o sumă care este divizibilă cu n . În acest caz am găsit mulțimea căutată.

2. Avem n sume care dau resturi diferite de zero la împărțirea cu n . Avem deci n obiecte (sume) distribuite în $n-1$ cutii (resturile nenule ale împărțirii la n au valori între 1 și $n-1$). Drept urmare, există cel puțin două obiecte care sunt în aceeași cutie!! Rezultă că există cel puțin două sume care vor da același rest la împărțirea cu n . Fie S_k și S_m două asemenea sume, unde $k < m$. Atunci $S_m - S_k$ se divide la n și mulțimea căutată este $\{a_{k+1}, \dots, a_m\}$.

Aplicație- problemă de concurs- OLI 2018, Constanța, clasa a X-a

Secvență

Fiind dat v un vector cu n elemente numere naturale, să se determine cea mai lungă secvență de numere (de pe poziții consecutive) din vector a căror sumă este multiplu de 13. Dacă există mai multe secvențe de aceeași lungime maximă se va afișa cea care are indicele de început minim.

Date de intrare Din fișierul "vector.in" se citesc: de pe prima linie n -numărul elemente ale vectorului și apoi, pe linia a doua, cele n elemente ale acestuia.

Date de ieșire În fișierul "vector.out" se vor afișa, separate de câte un spațiu, în această ordine, următoarele: lungimea secvenței maxime cerute, poziția de început și poziția de sfârșit ale acesteia.

Exemplu

vector.in	vector.out	observații
14 2 3 4 5 6 7 8 9 11 12 4 12 14 13	10 3 12	În șirul dat sunt mai multe secvențe a căror sumă este multiplu de 13: 4 5 6 7 8 9 11 12 4 12, 12 14 13, dar cea mai mare secvență cu această proprietate are lungimea 10, începe de la poziția 3 și se termină la poziția 12.

Restricții și precizări

- $n \leq 10.000$
- $0 < v[i] \leq 2.000.000.000$, pt. orice $1 \leq i \leq n$

Atenție !!! $(a+b)\%13=(a\%13+b\%13)\%13$

Timp de execuție: 0.2 s/test

Fundamentarea rezolvării

Conform ultimului dintre exemplele de mai sus, considerăm sumele secvențelor construite începând cu poziția 1 până la poziția i , cu i de la 1 la n , astfel:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

.....

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Trebuie să analizăm aceste sume din punctul de vedere al restului la împărțirea la 13 (același raționament se aplică la analizarea restului la împărțirea la un alt număr). Prin urmare, e valabil raționamentul de mai sus, dar va trebui să adaptăm această idee sus pentru a determina cea mai mare lungime a unei secvențe cu această proprietate. Astfel, vom construi doi vectori (st , dr) de dimensiune 13, cu semnificația:

$st[i]$ = cel mai mic indice k pentru care suma S_k dă restul i la împărțirea cu 13

$dr[i]$ = cel mai mare indice k pentru care suma S_k dă restul i la împărțirea cu 13

Pentru fiecare i , calculăm apoi diferența $dr[i]-st[i]$ și reținem maximumul dintre acestea.

O implementare a acestei rezolvări este următoarea:

```
#include <iostream>
#include <fstream>
using namespace std;
int v[10001], st[13], dr[13], i, j, n, s, rest[13], maxim=0, maxim1, maxim2, ii, jj;
int main()
{
    ifstream f ("vector.in");
    f >> n; s=0;
    for (i=1; i<=n; i++) { f >> v[i];
        s=(s+(v[i]%13))%13;
        if (!rest[s]) { st[s]=i; rest[s]=1; }
        else dr[s]=i; }
    if (dr[0]!=0) { maxim1=dr[0]; ii=0; }
    maxim2=0;
    for (i=0; i<=12; i++) if (dr[i]-st[i]>maxim2) { maxim2=dr[i]-st[i]; ii=i; }
    else if (dr[i]-st[i]==maxim2 and st[i]<st[ii]) { maxim2=dr[i]-st[i]; ii=i; }
    if (maxim1>=maxim2) cout<<maxim1<<" "<<1<<" "<<dr[0]; else
    cout<<maxim2<<" "<<st[ii]+1<<" "<<dr[ii];
    return 0;
}
```

Bibliografie: <http://www.math.md/school/competitiva/dirichlet/dirich.html>
<https://www.pbinfo.ro/articole/5796/principiul-lui-dirichlet>